Classificação:_________

Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2023/2024 - UC 47166 (1º Ano/2º Sem)

Exame Final - 19/06/2024 **Duração: 2h 30m**

NOME: Exemplo de Resolução **NMec:** _________

CURSO:______________________________ **Folhas Supl.:** _________

A - Bloco Questões 1, 2, 3

1. (3.5) Considere uma linguagem de primeira ordem com os símbolos de predicado E e P de um argumento, A e C de dois argumentos, sendo x e y, símbolos de variáveis, com as seguintes fórmulas:

$\varphi_1 \equiv \forall x \left(E(x) \to \forall y(P(y) \to (A(x,y) \vee \neg C(x,y)))\right)$

$\varphi_2 \equiv \exists x \, \exists y \left(E(x) \wedge P(y) \wedge C(x,y)\right)$

$\psi \equiv \exists x \, \exists y \, A(x,y)$

Usando o método de resolução mostre que $\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$.

2. (4.0) Determine, justificando, o número de elementos dos seguintes conjuntos:

(a) (2.0) Conjunto de *passwords* de 6 caracteres, formadas a partir de um alfabeto de 11 letras e 4 digítos, contendo exatamente dois digítos. Note que, tanto as letras como os digítos podem repetir-se, ou seja, $xx33az$, $01xzza$ e $z00xaa$ são exemplos de possíveis *passwords*, admitindo que tanto as letras a, x, z como os digítos $0, 1, 3$ estão incluídos no alfabeto considerado.

(b) (2.0) Conjunto de sacos de 7 peças de fruta que podem ser escolhidas de uma coleção de ameixas, bananas, laranjas, maçãs e pêras, não se fazendo distinção entre frutas da mesma espécie.

3. (2.5) Determine o coeficiente do termo $x^2y^2z^3$ no desenvolvimento de $\left(2x - y + \dfrac{z^3}{x}\right)^6$. Justifique.

(i) $p \to q \equiv \neg p \vee q$

1) $\varphi_1 \overset{(i)}{\equiv} \forall x \left(\neg E(x) \vee \forall y \left(\neg P(y) \vee A(x,y) \vee \neg C(x,y)\right)\right)$

FNS
forma Normal de Skolem

$\overset{}{\equiv} \forall x \forall y \left(\underbrace{\neg E(x) \vee \neg P(y) \vee A(x,y) \vee \neg C(x,y)}_{\text{cláusula } C_1}\right)$

$\varphi_2 \overset{FNS}{\equiv} \underbrace{E(a)}_{C_2} \wedge \underbrace{P(b)}_{C_3} \wedge \underbrace{C(a,b)}_{C_4}$, a, b constantes de Skolem

$\neg\psi \equiv \neg(\exists x \exists y \, A(x,y)) \overset{FNS}{\equiv} \forall x \forall y \left(\underbrace{\neg A(x,y)}_{C_5}\right)$

Conjunto de cláusulas obtidas de $\varphi_1, \varphi_2, \neg\psi$, com renomeação de variáveis:

$$S = \{ \neg E(x) \vee \neg P(y) \vee A(x,y) \vee \neg C(x,y),\ E(a),\ P(b),\ C(a,b),\ \neg A(z,w) \}$$

x, y, z, w variáveis
a, b constantes

Método de resolução (R): $\sigma_1 = \{a/x\}$ umg de $\{E(x), E(a)\}$

$$\dfrac{\begin{array}{ll} C_1\sigma_1: & \neg E(a) \vee \neg P(y) \vee A(a,y) \vee \neg C(a,y) \\ C_2: & E(a) \end{array}}{C_6: \quad \neg P(y) \vee A(a,y) \vee \neg C(a,y)} \; R(C_1\sigma_1, C_2)$$

$$\dfrac{C_3: \quad P(b)}{C_7: \quad A(a,b) \vee \neg C(a,b)} \; R(C_6\sigma_2, C_3)$$

$\sigma_2 = \{b/y\}$, umg de $\{P(y), P(b)\}$

$$\dfrac{C_4: \quad C(a,b)}{C_8: \quad A(a,b)} \; R(C_7, C_4)$$

$$\dfrac{C_5\sigma_3: \quad \neg A(a,b)}{\perp} \; R(C_8, C_5\sigma_3)$$

$\sigma_3 = \{a/z, b/w\}$ umg de $\{A(z,w), A(a,b)\}$

Donde, S é inconsistente, pelo que, $\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$ (ou seja, ψ é consequência lógica de φ_1 e φ_2)

2) (a) Existem $C^6_2 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$

possibilidades de colocar os 2 dígitos, os quais podem repetir-se, donde, temos $4 \times 4 = 4^2 = 16$ maneiras de os obter; finalmente, escolhemos as 4 letras para colocar nas 4 posições restantes havendo $11 \times 11 \times 11 \times 11 = 11^4$ possib. de fazer isso; Logo, pelo princípio da multiplicação existem $\underline{15 \times 16 \times 11^4}$ "passwords" nas condições requeridas.

(b) Cada saco é um multiconjunto de cardinal 7 que se pode obter com 5 tipos de objetos distintos (a, b, l, m, p); por exemplo, $\{a, a, b, b, l, m, p\}$ é um multiconjunto possível com 2 ameixas, 2 bananas, 1 laranja, 1 maçã e 1 pêra; Portanto, o nº de sacos possíveis de obter coincide com o nº de combinações com repetição de 5 objetos tomados 7 a 7, i.e.,

$$\left(\!\binom{5}{7}\!\right) = \binom{5+7-1}{7} = \binom{11}{7} = \binom{11}{4} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4!}$$

3)

$$\left(2x-y+z^3/x\right)^6=\sum_{m_1+m_2+m_3=6}\binom{6}{m_1,m_2,m_3}(2x)^{m_1}(-y)^{m_2}\left(\frac{z^3}{x}\right)^{m_3}$$

Coeficiente de $x^2y^2z^3$ é obtido de

$$\binom{6}{m_1,m_2,m_3}2^{m_1}\,x^{m_1-m_3}(-y)^{m_2}\left(z^3\right)^{m_3}\Rightarrow$$ com $m_3=1$, $m_2=2$ e $m_1=3$, t.q. $m_1+m_2+m_3=6$;

$$=\binom{6}{3,2,1}2^3\,x^{3-1}(-y)^2\,z^3$$

$$=\binom{6}{3,2,1}8\,x^2\,y^2\,z^3,$$ sendo dado por

$$\binom{6}{3,2,1}8=\frac{6\times5\times4}{2}\times8=6\times5\times2\times8=60\times8=480$$

Classificação:__________

Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2023/2024 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Exame Final - 19/06/2024 Duração: 2h 30m

NOME:______________________________ NMec: __________

CURSO:______________________________ Folhas Supl.: __________

B - Bloco Questão 4

4. (3.0) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão definida por

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (-3)^n \quad, \ n \geq 2, \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 3 \ . \end{cases}$$

Resolva a equação de recorrência dada, de modo a obter uma fórmula fechada para a_n, $n \geq 0$.

(ver resolução na Questão 1 do Teste T2 de Avaliação Discreta)

Classificação:__________

Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2023/2024 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Exame Final - 19/06/2024 **Duração: 2h 30m**

NOME:____ **NMec:** __________

CURSO:______________________________________ **Folhas Supl.:** __________

C - Bloco Questão 5

5. (7.0) Considere a seguinte matriz de custos W relativa a um grafo $G = (V, E, W)$ cujo conjunto de vértices é $V = \{u, v, w, x, y, z\}$:

$$W = \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u & v & w & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 6 & \infty & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 3 & \infty \\ 3 & 1 & 0 & 4 & \infty & \infty \\ 6 & 1 & 4 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & 3 & \infty & 1 & 0 & 3 \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) (3.0) Desenhe o grafo G e aplique o algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho de menor custo entre os vértices u e y, e indique o custo desse caminho.

Nota: Apresente todos os passos (iterações) do algoritmo através de uma tabela adequada.

(b) (2.0) Seja H o subgrafo de G induzido pelo subconjunto de vértices $\{u, v, w, x, y\} \subset V$. Verifique que H contém 8 arestas e, aplicando a fórmula recursiva $\tau(H) = \tau(H - \alpha) + \tau(H//\alpha)$, onde α é uma aresta de H que não é lacete, determine o número de árvores abrangentes de H, $\tau(H)$.

(c) (2.0) Obtenha, justificando, um subgrafo abrangente de G que seja conexo e bipartido, indicando a respetiva bipartição do conjunto dos seus vértices.

(ver resolução na Questão 4 do Teste T2 de Avaliação Discreta)